

# Capitolo 10

## Calcolo integrale II

### 10.1 Integrale di Riemann

Sia assegnata una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  limitata.

**Definizione 10.1** Si definisce *partizione* di  $[a, b]$  un insieme finito e ordinato di punti

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}.$$

**Definizione 10.2** Si definisce *somma inferiore* di  $f$  relativa alla partizione  $P$  il numero

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \inf_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x).$$

Si definisce *somma superiore* di  $f$  relativa alla partizione  $P$  il numero

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sup_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x).$$

**Esempio 10.3** Consideriamo la funzione

$$\begin{aligned} f & : [0, 3] \rightarrow \mathbf{R} \\ f(x) & = x^3 - 3x^2 + 5 \end{aligned}$$

Rappresentiamo e calcoliamo la somma inferiore relativa a due diverse partizioni

$$\begin{aligned} P_1 & = \{0, 3/2, 3\}, \\ P_2 & = \{0, 1/2, 3/2, 5/2, 3\}. \end{aligned}$$

Anzitutto dobbiamo conoscere l'andamento della funzione, quindi abbiamo riportato il grafico nella fig. 10.1.

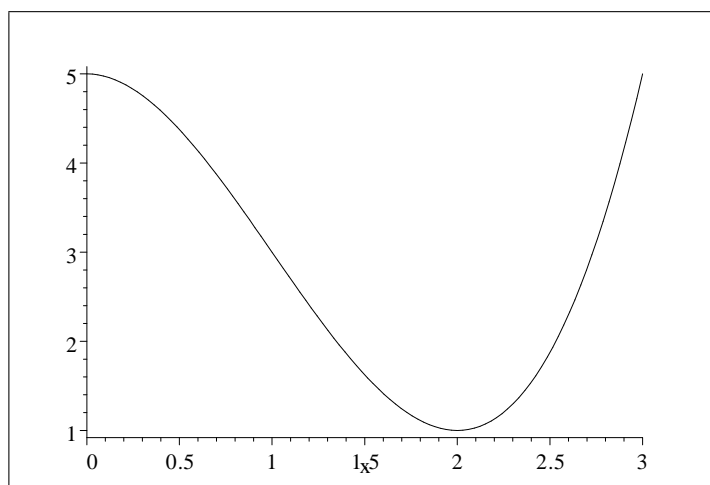


Fig. 10.1:  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

Per  $P_1$  la rappresentazione della somma inferiore è nella fig. 10.2

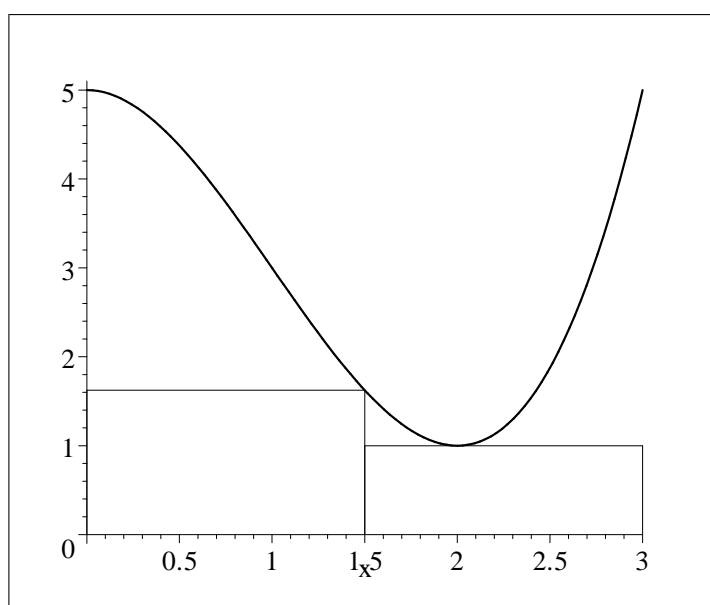
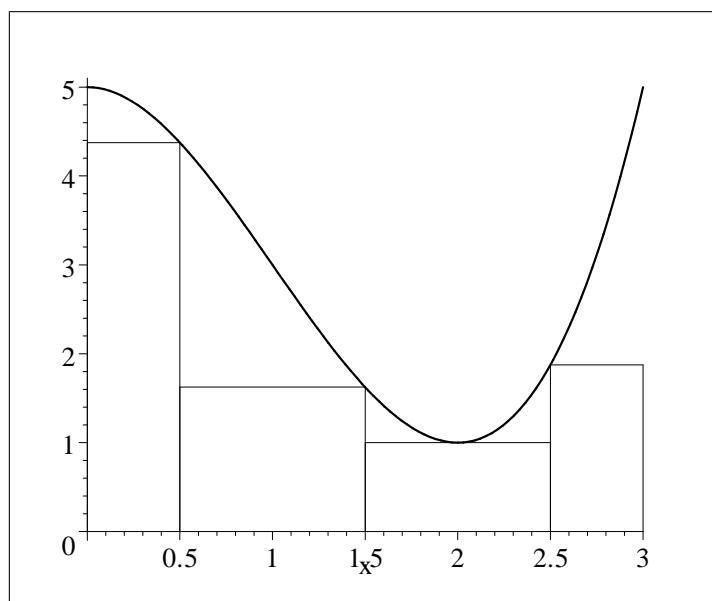


Fig. 10.2:  $s(f, P_1)$

e quindi

$$\begin{aligned} s(f, P_1) &= (3/2 - 0)f(3/2) + (3 - 3/2)f(2) \\ &= 63/16. \end{aligned}$$

Per  $P_2$  la rappresentazione della somma inferiore è nella fig. 10.3

Fig. 10.3:  $s(f, P_2)$ 

e quindi

$$\begin{aligned}
 s(f, P_2) &= (1/2 - 0)f(1/2) + (3/2 - 1/2)f(3/2) + \\
 &\quad + (5/2 - 3/2)f(2) + (3 - 5/2)f(5/2) \\
 &= 23/4
 \end{aligned}$$

Dunque, come evidenziato anche dal simbolo utilizzato, le quantità  $s(f, P)$  e  $S(f, P)$  dipendono in maniera essenziale, oltre che da  $f$ , dalla partizione  $P$ . Indichiamo con  $s(f)$  l'insieme di tutte le somme inferiori di  $f$  al variare della partizione  $P$ ; analogamente indichiamo con  $S(f)$  l'insieme di tutte le somme superiori.

**Proposizione 10.4** Per ogni partizione  $P$  risulta

$$s(f, P) \leq S(f, P).$$

Quali che siano  $P_1$  e  $P_2$  partizioni di  $[a, b]$  risulta

$$s(f, P_1) \leq S(f, P_2).$$

Il teorema precedente ci dice che gli insiemi  $s(f)$  e  $S(f)$  sono separati. In forza dell'assioma di completezza esiste almeno un elemento di separazione.

**Definizione 10.5** La funzione  $f$  si dice integrabile (secondo Riemann) in  $[a, b]$  se esiste un unico elemento di separazione tra l'insieme  $s(f)$  e l'insieme  $S(f)$ . Tale elemento prende il nome di integrale di Riemann e si denota con il simbolo

$$\int_{[a,b]} f(x)dx$$

In altri termini l'integrale di Riemann, se esiste, è l'unico numero reale minore di tutte le somme superiori e maggiore di tutte le somme inferiori.

In genere si dice che l'integrale (di funzioni positive) si interpreta come area del rettangoloide avente per base  $[a, b]$  e delimitata dal grafico di  $f$ . Questa interpretazione è alla base del simbolo stesso di integrale. Abbiamo una somma infinita ( $\int$  è una S stilizzata) delle aree di rettangolini infinitesimi aventi base  $dx$  e altezza  $f(x)$ ; tale somma è estesa da  $a$  a  $b$ .

Come nelle somme la variabile di integrazione non è rilevante e quindi, ad esempio, abbiamo:

$$\int_{[a,b]} f(x)dx = \int_{[a,b]} f(t)dt.$$

Analogamente a quanto detto per la tangente dobbiamo riconoscere che il concetto di area delimitata da una curva rimane di carattere intuitivo. In realtà è l'integrale che permette di definire correttamente i concetti di regione misurabile e di area.

**Esempio 10.6** Una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  costante, di costante valore  $c$  è integrabile e risulta

$$\int_{[a,b]} f(x)dx = m(b-a).$$

Dunque nel caso elementare di una funzione costante, il cui grafico delimita un rettangolo, abbiamo ritrovato il classico risultato: area = base  $\times$  altezza.

### 10.1.1 Funzioni integrabili

La nozione di integrale di Riemann ha senso per funzioni limitate. Tuttavia dobbiamo precisare subito che non tutte le funzioni limitate sono integrabili secondo Riemann.

**Esempio 10.7** ...

Sussistono i seguenti risultati

**Teorema 10.8** Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  è monotona, allora  $f$  è integrabile.

**Teorema 10.9** Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  è continua, allora  $f$  è integrabile.

**Teorema 10.10** Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  è limitata e presenta un numero finito di punti di discontinuità, allora  $f$  è integrabile.

Dobbiamo precisare, inoltre, che l'integrabilità ed il valore dell'integrale non dipendono dal comportamento della funzione integranda in un numero finito di punti. Precisamente sussiste il seguente teorema.

**Teorema 10.11** Si abbiano due funzioni  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  e  $g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ , sia  $S$  un sottoinsieme di  $[a, b]$  costituito da un numero finito di punti e risulti  $f(x) = g(x)$  per ogni  $x \in [a, b] \setminus S$ . Se  $f$  è integrabile, allora anche  $g$  è integrabile e risulta

$$\int_{[a,b]} g(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx.$$

Sussiste una proprietà di linearità.

**Proposizione 10.12** *Se le funzioni  $f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  sono integrabili, allora anche la funzione somma è integrabile e risulta*

$$\int_{[a,b]} (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int_{[a,b]} f_1(x) dx + \int_{[a,b]} f_2(x) dx.$$

*Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  è integrabile e  $c \in \mathbf{R}$ , allora  $c \cdot f$  è integrabile e risulta*

$$\int_{[a,b]} c \cdot f(x) dx = c \int_{[a,b]} f(x) dx$$

**Osservazione 10.13** *Se le funzioni  $f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  sono integrabili, allora anche la funzione prodotto è integrabile, ma è assolutamente falso che l'integrale del prodotto è uguale al prodotto degli integrali.*

Sussiste la proprietà additiva rispetto al dominio.

**Proposizione 10.14** *Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  è integrabile e  $c \in (a, b)$ , allora  $f$  è integrabile negli intervalli  $[a, c]$  e  $[c, b]$  e risulta*

$$\int_{[a,c]} f(x) dx + \int_{[c,b]} f(x) dx = \int_{[a,b]} f(x) dx.$$

### 10.1.2 Proprietà dell'integrale

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  integrabile, si definisce *media (integrale)* di  $f$  il numero reale

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f(x) dx.$$

**Teorema 10.15 (della media)** *Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  è integrabile, risulta*

$$\inf_{x \in [a,b]} f(x) \leq \bar{f} \leq \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

*Inoltre, se  $f$  è continua, esiste  $x_0 \in [a, b]$  tale che*

$$\bar{f} = f(x_0).$$

Dal Teorema della media consegue la proprietà di positività.

**Proposizione 10.16** *Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  è integrabile e per ogni  $x \in [a, b]$  risulta  $f(x) \geq 0$ , allora*

$$\int_{[a,b]} f(x) dx \geq 0.$$

Dalla linearità e dalla positività consegue la proprietà di confronto.

**Proposizione 10.17** *Se le funzioni  $f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  sono integrabili e per ogni  $x \in [a, b]$  risulta*

$$f_1(x) \geq f_2(x),$$

*allora*

$$\int_{[a,b]} f_1(x) dx \geq \int_{[a,b]} f_2(x) dx.$$

Come ultima proprietà possiamo menzionare la continuità rispetto al dominio, anch'essa conseguenza del Teorema della media.

**Proposizione 10.18** *Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  è integrabile risulta*

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} f(x)dx &= \lim_{c \rightarrow a^+} \int_{[c,b]} f(x)dx = \\ &= \lim_{c \rightarrow b^-} \int_{[a,c]} f(x)dx.\end{aligned}$$

## 10.2 Integrale definito

Siano  $I$  intervallo,  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  integrabile secondo Riemann in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in  $I$ .

**Definizione 10.19** *Per ogni  $a, b \in I$ , si definisce integrale definito di  $f$  tra  $a$  e  $b$  il numero reale*

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} \int_{[a,b]} f(x)dx & \text{se } a < b \\ 0 & \text{se } a = b \\ -\int_{[b,a]} f(x)dx & \text{se } b < a \end{cases}$$

A meno del segno, l'integrale definito coincide con l'integrale di Riemann, pertanto si riportano all'integrale definito le proprietà di linearità, la proprietà additiva rispetto al dominio, la continuità rispetto al dominio.

Di fatto il simbolo di integrale definito (il più simile a quello di somma) si preferisce a simbolo di integrale secondo Riemann.

### 10.2.1 Teorema Fondamentale del Calcolo

Supponiamo  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  continua.

Fissato  $a \in I$ , l'integrale definito consente di definire una nuova funzione

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

denominata funzione integrale di  $f$ .

**Teorema 10.20 (di esistenza di primitive)** *La funzione integrale definita da  $(\cdot)$  è una primitiva di  $f$ .*

**Dimostrazione.** ... ■

Questo teorema prende il nome di *Teorema Fondamentale del Calcolo*. Esso, infatti mette in relazione due nozioni apparentemente del tutto indipendenti (quella di primitiva, collegata con la derivata, e l'integrale definito, collegato con la misurazione di aree).

Da teorema precedente si deduce la cosiddetta *Formula fondamentale del Calcolo integrale*.

**Teorema 10.21** *Denotata con  $G$  una primitiva di  $f$ , per ogni  $a, b \in I$  si ha*

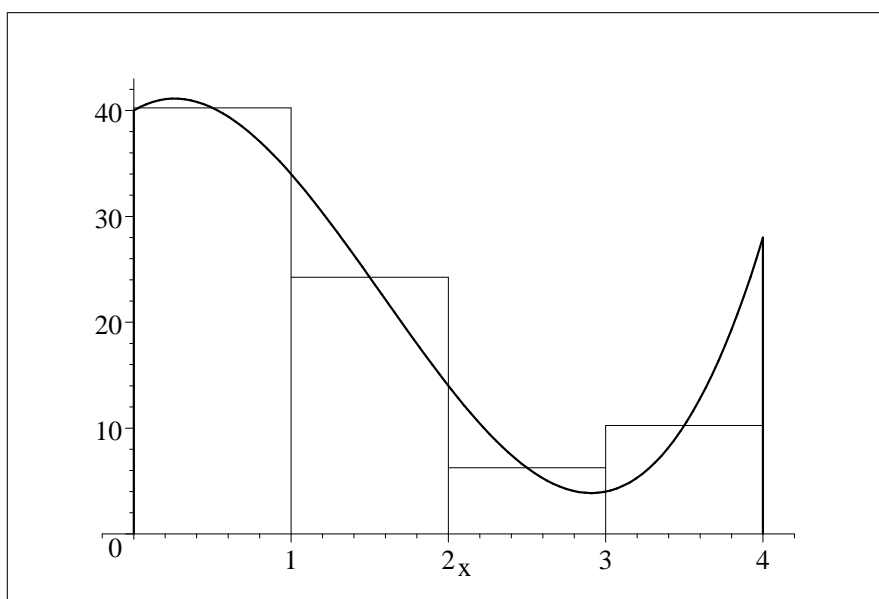
$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

**Dimostrazione.** ... ■

### 10.2.2 Integrazione approssimata

La formula fondamentale del calcolo consente di valutare gli integrali definiti (o di Riemann) quando si conosce una primitiva della funzione integranda, circostanza che non è sempre verificata. Per ovviare a questo problema esiste una teoria che viene sviluppata nel calcolo numerico.

Nella figura seguente, a titolo di esempio, presentiamo, il metodo dei rettangoli “mid-point” composto: si approssima  $\int_a^b f(x)dx$  con la somma delle aree di rettangolini aventi base uguale (l'intervallo  $[a, b]$  diviso in  $n$  parti uguali) e come altezza la funzione valutata nel punto medio di ciascun intervallino. Il Teorema di Lagrange ci consente di valutare l'errore che si commette.



## 10.3 Integrali impropri

Per nostra comodità riscriviamo la proprietà di continuità rispetto al dominio.

**Proposizione 10.22** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  integrabile secondo Riemann. Risulta

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x)dx \\ &= \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x)dx. \end{aligned}$$

A partire da questa proprietà, vogliamo dare significato all'integrale per una classe più ampia di funzioni

$$\int_I f(x)dx$$

con  $I$  intervallo illimitato e/o  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  illimitata.

In quanto segue  $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$ , con  $a < b$  e con le opportune restrizioni nel caso di estremi inclusi.

Per semplicità assumeremo le funzioni continue, quindi avremo immediatamente l'integrabilità secondo Riemann sui sottointervalli intervalli chiusi e limitati.

Possiamo distinguere quattro situazioni. Nei primi casi la definizione viene suggerita direttamente dalla proprietà di continuità rispetto al dominio.

a) Sia  $f : [a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ ; si pone

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x)dx.$$

b) Analogamente nel caso  $f : (a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ; si pone

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x)dx.$$

c) Sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ . Ci si riconduce ai casi precedenti: fissato  $x_0 \in (a, b)$  si pone

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^b f(x)dx = \\ &= \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^{x_0} f(x)dx + \lim_{c \rightarrow b^-} \int_{x_0}^c f(x)dx \end{aligned}$$

sotto la condizione che non si tratti di infiniti di segno opposto.

d) Sia  $f : [a, b] \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbf{R}$ . Ci si riconduce ai casi precedenti **a)** e **b)**:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^b f(x)dx = \\ &= \lim_{c \rightarrow x_0^-} \int_a^c f(x)dx + \lim_{c \rightarrow x_0^+} \int_c^b f(x)dx, \end{aligned}$$

sotto la condizione che non si tratti di infiniti di segno opposto.

**Definizione 10.23** *In tutti i casi suddetti la funzione  $f$  si dice integrabile in senso improprio se i limiti esistono e sono finiti.*

Evidentemente più delicata è la situazione con limiti bilateri o con più limiti (casi **c)** e **d)**): effettuando un limite simultaneo e non due separati si potrebbe giungere ad un risultato diverso (e sbagliato)...

Per tutto il resto del paragrafo quando si dice integrabile si intende in senso improprio.

In molte situazioni, teoriche e/o pratiche, è sufficiente stabilire che una certa funzione sia integrabile in senso improprio, anche se non si riesce a calcolare l'integrale. A questo scopo si sviluppa una teoria che per molti aspetti ricorda quella delle serie.



### 10.3.1 Integrabilità di funzioni positive

Enuciamo due criteri base nell'intervallo prototipo  $[a, b)$  (ove  $b$  può essere anche  $+\infty$ ). Ovviamente si hanno risultati analoghi in  $(a, b]$ .

Anzitutto osserviamo che, se  $f$  è positiva (in un intorno sinistro di  $b$ ), allora è assicurata l'esistenza del limite

$$\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx.$$

Rimane da stabilire se il limite è finito.

**Criterio 10.24 (di confronto)** *Siano  $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbf{R}$  continue. Se esiste  $\delta > 0$  tale che, per ogni  $x \in [b - \delta, b)$*

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

*allora: se  $g$  è integrabile, allora anche  $f$  è integrabile; se  $f$  non è integrabile, anche  $g$  non è integrabile.*

**Criterio 10.25 (di confronto asintotico)** *Siano  $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbf{R}$  continue e positive (in un intorno sinistro di  $b$ ). Se risulta*

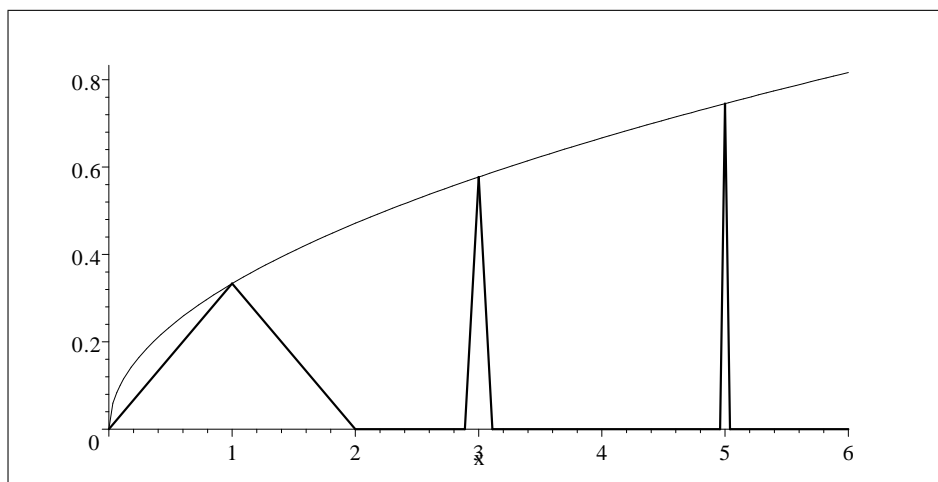
$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{g(x)}{f(x)} = \ell \in (0, +\infty)$$

*(in particolare se  $f$  e  $g$  sono asintoticamente equivalenti), allora  $f$  è integrabile se e solo se  $g$  è integrabile.*

#### Integrabilità su intervalli $[a, +\infty)$

Essendo  $f$  positiva, poichè l'integrale si interpreta come area, ci attendiamo che per  $x \rightarrow +\infty$  si richieda che la funzione tenda a 0. In realtà tale condizione non è né sufficiente né necessaria per l'integrabilità.

**Esempio 10.26** *La funzione  $f(x) = 1/x$  è infinitesima ma non integrabile in senso improprio. Esistono funzioni integrabili in senso improprio ma non infinitesime e neanche limitate (vedi figura seguente).*



Per i criteri di confronto, esistono prototipi di funzioni integrabili, infinitesime all'infinito:

- $\frac{1}{a^x}$  è integrabile per ogni  $a > 1$ ;
- $\frac{1}{x^\alpha}$  è integrabile se e solo se  $\alpha > 1$ .

Per gli altri casi (in cui  $f(x)$  non è equivalente ai prototipi) sussiste il criterio degli infinitesimi del tutto analogo a quello delle serie.

**Criterio 10.27** *Se*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = +\infty$$

*allora l'integrale diverge. Se esiste un certo  $\alpha > 1$  tale che*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha f(x) = 0$$

*allora l'integrale converge.*

Abbiamo osservato che tra integrali impropri e serie c'è una notevole analogia.

Ora possiamo enunciare un ulteriore criterio per la convergenza delle serie a termini positivi; da esso, in particolare, si deduce il carattere delle serie armoniche generalizzate.

**Criterio 10.28** *Sia assegnata una serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

*a termini positivi. Supponiamo che esista una funzione  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  continua, decrescente e tale che  $f(n) = a_n$ . Allora la serie converge se e solo se converge l'integrale*

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx.$$

*Sussiste inoltre una stima dell'errore: denotate con  $S$  ed  $s_n$  rispettivamente la somma della serie e la somma parziale  $n$ -sima, risulta*

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx \leq S - s_n \leq \int_n^{+\infty} f(x)dx.$$

**Osservazione 10.29** *Dobbiamo sottolineare che mettere in evidenza che la somma  $S$  non coincide con l'integrale. In ogni caso la disuguaglianza ( ) consente di approssimare la somma.*

Il criterio dell'integrale, infine, serve a studiare serie che sfuggono anche al criterio degli infinitesimi.

**Esempio 10.30** *Si consideri la serie numerica*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log^p n}.$$

**Integrabilità su intervalli  $(0, a]$** 

Prototipi di funzioni da utilizzarsi per i criteri di confronto:

- $\frac{1}{x^\alpha}$  è integrabile se e solo se  $\alpha < 1$ .

Abbiamo anche un criterio “degli infiniti” analogo a quello visto in precedenza.

**Criterio 10.31** *Se esiste un certo  $\alpha < 1$  tale che*

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha f(x) = 0$$

*allora l'integrale converge.*

*Se*

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x f(x) = +\infty$$

*allora l'integrale diverge.*

**10.3.2 Assoluta integrabilità**

Se la funzione integranda non ha segno costante (in un intorno del punto in cui si calcola il limite), non è affatto assicurata l'esistenza del limite, come mostra:

$$\int_0^{+\infty} \sin x \, dx$$

Il principale criterio di convergenza è quello della assoluta integrabilità.

**Teorema 10.32** *Sia  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  continua. Se l'integrale (improprio)*

$$\int_I |f(x)| \, dx$$

*converge, allora converge anche*

$$\int_I f(x) \, dx$$

*e si ha*

$$\left| \int_I f(x) \, dx \right| \leq \int_I |f(x)| \, dx$$

Ovviamente per studiare l'integrabilità di

$$\int_I |f(x)| \, dx$$

si possono utilizzare tutte le tecniche introdotte per gli integrali impropri a segno costante.

**Osservazione 10.33** *Esistono funzioni integrabili ma non assolutamente integrabili.*